JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 15, 78–82 (1975)

Eindeutigkeit bei der Gleichmässigen Approximation mit Tschebyscheffschen Splinefunktionen

HANS STRAUSS

Institut für Angewandte Mathematik I der Universität Erlangen-Nürnberg, 8520 Erlangen, Martensstrasse 1, Deutschland

Communicated by G. Meinardus

1. EINLEITUNG

Gegeben ist der lineare Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ versehen mit der Tschebyscheffnorm

$$\|f\| := \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

Es sei

$$a = x_0 < x_1 \cdots < x_k < x_{k+1} = b$$

eine Unterteilung des Intervalles durch sogenannte feste Knoten. Seien $\{w_i(t)\}_{i=0}^n$

$$n + 1 \text{ positive Funktionen auf } C\,[a, b] \text{ mit } w_i \in C^{n-i}[a, b]$$

$i = 0, \ldots, n$.

Sei weiterhin

$$\begin{aligned} \phi_l(t, x) &:= w_0(t) \int_x^t w_1(\xi_1) \int_x^{\xi_1} w_2(\xi_2) \cdots \int_x^{\xi_{l-1}} w_l(\xi_l)\, d\xi_l \cdots d\xi_1 \qquad t > x \\ &:= 0 \qquad t \leqslant x \\ u_l(t) &:= \phi_l(t, a) \qquad l = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Der lineare Raum der Tschebyscheffsplines ist gegeben durch

$$S_{n,k}(x_0, \ldots, x_{k+1}) = \left\{ s(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i(t) + \sum_{i=1}^{k} c_i \phi_n(t, x_i) \right\}.$$

Gesucht ist nun eine beste Approximation aus dem Teilraum $S_{n,k}$ an eine vorgegebene stetige Funktion.

Die Existenz einer Minimallösung ist nach der Theorie gesichert. Da der Raum $S_{n,k}$ die Haarsche Bedingung nicht erfüllt, gibt es Funktionen, für die mehrere Minimallösungen existieren. Rice und Schumaker haben schon Bedingungen angegeben, für die das Approximationsproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Dort wurde die Fehlerfunktion einer Minimallösung betrachtet und gezeigt, daß die Zahl der Alternantenpunkte Rückschlüsse auf die Eindeutigkeit der Minimallösung zuläßt. Diese Überlegungen sollen hier fortgesetzt werden. Vor allem wird auch die Frage vorgelegt, ob die Eindeutigkeit der Minimallösung immer aus dem Alternantenverhalten *einer* Fehlerfunktion entschieden werden kann.

2. Hilfssätze

Ein Punkt $t \in [a, b]$ heißt *Extremalpunkt* von $f \in C[a, b]$, falls $f(t) = \|f\|$ gilt. Man sagt f *alterniert r-mal* auf $[a, b]$, falls $r + 1$ alternierende Extremalpunkte $\{t_i\}_{i=1}^{r+1}$ existieren, d.h.

$$a \leqslant t_1 < \cdots < t_{r+1} \leqslant b$$

mit

$$f(t_i) = (-1)^i \zeta \|f\| \qquad \zeta = \pm 1.$$

Diese Bezeichnung wird auch für halboffene, bzw. offene Intervalle verwendet. Dann muß $a < t_1$ oder $t_{r+1} < b$ gelten. Es gelten nun folgende Sätze (siehe [2, 5]).

Satz 2.1. *Falls eine Punktmenge* $\{t_i\}_{i=1}^{n+k+1} \subset [a, b]$ *die Bedingung*

$$t_i < x_i < t_{i+n+1} \qquad i = 1, \ldots, k$$

erfüllt, existiert genau ein Spline $s \in S_{n,k}(x_0, \ldots, x_{k+1})$, *der in* $\{t_i\}_{i=1}^{n+k+1}$ *vorgegebene Werte interpoliert.*

Satz 2.2. $s_0 \in S_{n,k}(x_0, \ldots, x_{k+1})$ *ist genau dann Minimallösung an* $f \in C[a, b]$, *wenn es ein Intervall* $[x_i, x_{i+j}]$ *gibt, auf dem* $f - s_0$ $n + j$*-mal alterniert.*

Es gibt Splines, die folgendes Vorzeichenverhalten besitzen:

Satz 2.3. *Eine Funktion* $f \in C[a, b]$ *sei vorgegeben, die in* $[a, b]$ *nur endlich viele Nullstellen besitzt und genau in den Punkten* $\{t_i\}_{i=1}^{r} \subset (a, b)$ *das Vorzeichen wechselt.*

(a) *Falls* $k \geqslant n$ *und* $r \leqslant k - n$ *gilt, existiert ein Spline* $s \in S_{n,k}(x_0, \ldots, x_{k+1})$ *mit*

(1) $f(x)\, s(x) \geqslant 0 \qquad x \in [a, b]$

(2) $s \not\equiv 0$

(3) $s^{(i)}(a) = s^{(i)}(b) = 0 \qquad i = 0, \ldots, n-1.$

(b) *Falls* $r \leqslant k$ *gilt, existiert ein Spline* s, *der* (1) *und* (2) *und genau eine der Bedingungen*

$$s^{(i)}(a) = 0 \qquad i = 0,..., n-1,$$

bzw.

$$s^{(i)}(b) = 0 \qquad i = 0,..., n-1$$

erfüllt.

Der Fall (a) wurde in [6] bewiesen. Der Fall (b) läßt sich auf den Fall (a) zurückführen. Wenn z.B. $s^{(i)}(a) = 0$, $i = 0,..., n-1$, erfüllt werden soll, erweitert man die Knotenmenge durch $x_{k+1} < x_{k+2} \cdots < x_{k+n+1}$ und findet auf $[x_0, x_{k+n+1}]$ einen Spline der Art (a), der auf $[x_0, x_{k+1}]$ die Bedingungen von (b) erfüllt.

Über die Nullstellenmenge der Splines läßt sich folgende Aussage machen.

Satz 2.4. *$s \in S_{n,k}(x_0, ..., x_{k+1})$ besitze kein identisch verschwindendes Intervall. Dann hat s höchstens $n + k$ Nullstellen.*

Zur Zählung der Nullstellen und zum Beweis des Satzes siehe [1].

3. Eindeutigkeit

Im folgenden ist eine Minimallösung s_0 von f bekannt. Es wird gezeigt, in welchen Fällen aus dem Alternantenverhalten der Fehlerfunktion $f - s_0$ entschieden werden kann, ob weitere Minimallösungen existieren.

Satz 3.1. *$s_0 \in S_{n,k}$ ist Minimallösung an $f \in C[a, b]$. $f - s_0$ besitzt in einem der folgenden Intervalle*

$$[a, x_j],\ [x_{k-j+1}, b] \qquad j = 1,..., k \tag{3.1a}$$

$$[x_i, x_{i+j+n}] \subset [a, b] \qquad \textit{mit} \quad j > 0 \ (\textit{falls} \ k > n+1) \tag{3.1b}$$

höchstens j alternierende Extremalpunkte. Dann gibt es weitere Minimallösungen.

Beweis. Wir beschränken uns darauf, die Existenz weiterer Minimallösungen nachzuweisen, falls $f - s_0$ auf einem Intervall der Form (3.1b) höchstens j alternierende Extremalpunkte enthält. Sei $M := \| f - s_0 \|$ und $[x_i, x_{i+j+n}] \subset [a, b]$ $(j \geqslant 1)$ das genannte Intervall. Besitzt es keine zwei alternierenden Extremalpunkte, kann man leicht einen Spline s_1 angeben, so daß $s_0 - s_1$ ebenfalls Minimallösung ist. Sei also $j \geqslant 2$. Dann existieren Punkte $\{t_i\}_{i=1}^{r} \subset (x_i, x_{i+j+n})$ mit $r \leqslant j-1$ und ein $\epsilon > 0$, für die

$$\zeta(-1)^i (f - s_0)(x) \leqslant M - \epsilon \qquad x \in [t_{i-1}, t_i] \qquad i = 1,..., r+1 \tag{3.2}$$

gilt, wobei $\zeta = \pm 1$ und $t_0 := x_i$, $t_{r+1} := x_{i+j+n}$ ist.

Nach Satz 2.3a gibt es einen Spline $s \in S_{n,j+n-1}(x_i, ..., x_{i+j+n})$, so daß

$$\begin{aligned} &\zeta(-1)^i s(x) \geqslant 0 \qquad x \in [t_{i-1}, t_i], \qquad i = 1,..., r+1 \\ &s^{(i)}(x_i) = s^{(i)}(x_{i+j+n}) = 0 \qquad i = 0,..., n-1 \\ &s \not\equiv 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

erfüllt ist. Nun setzen wir

$$s_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon}{\| s \|} s(x) & x \in [x_i, x_{i+j+n}] \\ 0 & \text{sonst in } [x_0, x_{k+1}]. \end{cases} \tag{3.4}$$

Aus den Formeln (3.2), (3.3), und (3.4) folgt dann

$$| f(x) - s_0(x) + s_1(x) | \leqslant M,$$

also ist $s_0 - s_1$ ebenfalls Minimallösung.

Falls $f - s_0$ auf einem Intervall der Form (3.1a) höchstens j alternierende Extremalpunkte besitzt, kann die Aussage des Satzes mit Hilfe von Satz 2.3b gezeigt werden.

Demgegenüber gilt folgender Satz:

Satz 3.2. *s_0 ist Minimallösung an $f \in C[a, b]$. $f - s_0$ besitzt in allen Intervallen*

$$[a, x_j),\ (x_{k-j+1}, b] \qquad j = 1,..., k \tag{3.5a}$$

$$(x_i, x_{i+j+n}) \subset (a, b) \qquad \textit{mit } j > 0 \ (\textit{falls } k > n+1) \tag{3.5b}$$

wenigstens $j + 1$ alternierende Extremalpunkte. Dann ist s_0 die einzige Minimallösung.

Beweis. Man nimmt an, es gebe eine weitere Minimallösung s_1. Nun sei $[x_i, x_{i+j}] \subset [a, b]$ ein maximales Intervall, auf dem $s_0 - s_1$ höchstens endlich viele Nullstellen besitzt. ($(s_0 - s_1)(x) = 0$ für $x \in [x_{i-1}, x_i]$, falls $x_i > x_0$ und $x \in [x_{i+j}, x_{i+j+1}]$, falls $x_{i+j} < x_{k+1}$). Es werden die folgenden Fallunterscheidungen getroffen:

(α) $[x_i, x_{i+j}] \subset [x_1, x_k]$. Dann ist j darstellbar als $j := n + \tau$, wobei $\tau \geqslant 1$ ist. Nach Voraussetzung besitzt $f - s_0$ in $(x_i, x_{i+n+\tau})$ wenigstens $\tau + 1$ alternierende Extremalpunkte. $s_0 - s_1$ besitzt in $(x_i, x_{i+n+\tau})$ wenigstens τ Nullstellen (siehe auch [4, Vol. I, S.61]). Da $s_0 - s_1$ in x_1, bzw. $x_{i+n+\tau}$ n-fache Nullstellen hat, enthält $[x_i, x_{i+n+\tau}]$ wenigstens $2n + \tau$ Nullstellen von $s_0 - s_1$. Nach Satz 2.4 ist dies ein Widerspruch.

(β) Falls $x_i = a$, $x_{i+j} < b$, bzw. $x_j > a$, $x_{i+j} = b$ kann man auf Grund der Voraussetzung (3.5a) mit entsprechenden Argumenten wie in (α) einen Widerspruch herbeiführen.

(γ) $x_i = a$, $x_{i+j} = b$. s_0 ist eine Minimallösung, für die (3.5a) erfüllt ist. Daraus erhält man, daß $f - s_0$ wenigstens $n + k + 2$ alternierende Extremalpunkte besitzen muß. Also hat $s_0 - s_1$ wenigstens $n + k + 1$ Nullstellen, was wiederum ein Widerspruch zu Satz 2.4 ist.

Aus diesem Satz lassen sich auch Ergebnisse von Rice und Schumaker folgern.

Bemerkung. Es gibt Fälle, die weder in Satz 3.1 noch in Satz 3.2 behandelt werden. $f - s_0$ alterniert in allen Intervallen der Gestalt (3.1) j-mal, jedoch nicht in allen Intervallen der Gestalt (3.5). Hier lassen sich Funktionen angeben, bei denen es nur eine Minimallösung gibt, aber auch Funktionen, bei denen mehrere Minimallösungen existieren.

Literatur

1. S. Karlin und L. L. Schumaker, The fundamental theorem of algebra for Tchebycheffian monosplines, *J. d'Analyse* **20** (1967), 233–270.
2. S. Karlin und Z. Ziegler, Tchebycheffian spline functions, *J. Siam Num. Anal.* **3** (1966), 514–543.
3. J. R. Rice, Characterization of Chebyshev approximations by splines, *J. Siam Num. Anal.* **4** (1967), 557–565.
4. J. R. Rice, "The Approximation of Functions," Addison-Wesley, Reading, Mass., Vol. I, 1964, Vol. II, 1969.
5. L. L. Schumaker, Uniform approximation by Tchebycheffian spline functions, *J. Math. Mech.* **18** (1968), 369–378.
6. H. Strauss, L_1-Approximation mit Splinefunktionen, erscheint in: ISNM, Birkhäuserverlag.